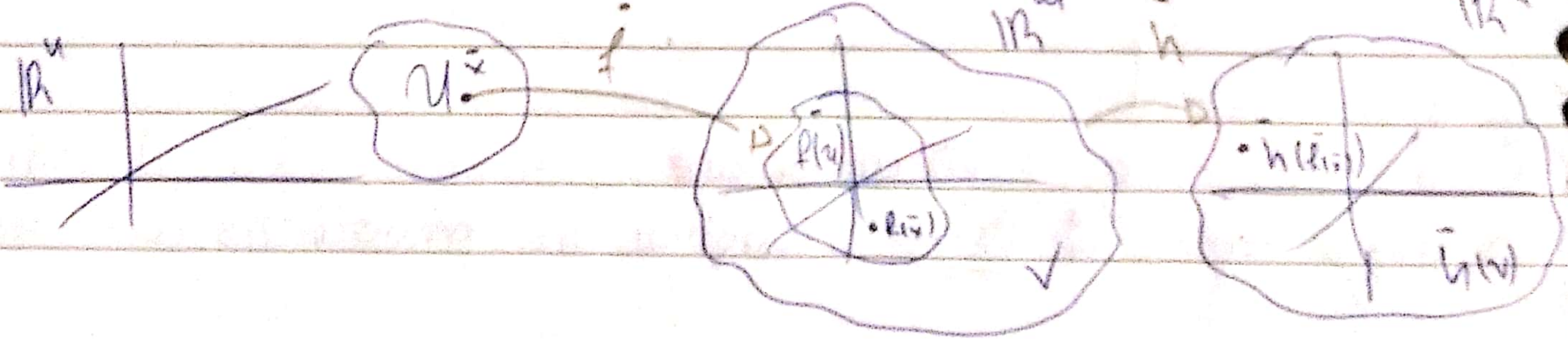
6/10/20

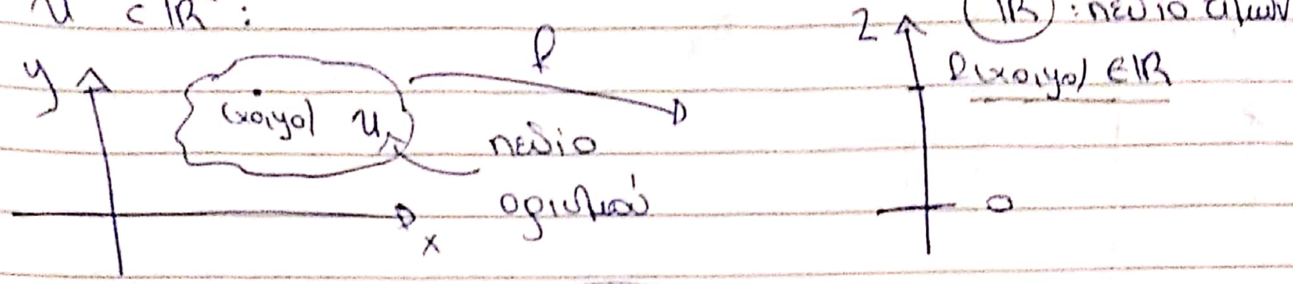
2η βιντεοδιάλεξη

Σύνθεση $h\circ \bar{f}: U \to \mathbb{R}^k$ της $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ με την $\bar{h}: V \to \mathbb{R}^k$, όπου $V \subset \mathbb{R}^m$ και $\bar{f}(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$.

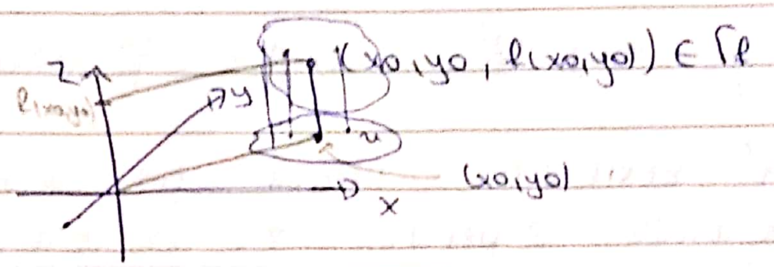


όπου $\bar h(\bar f(\bar x)) = \bar h \circ \bar f(\bar x)$

Γεωμετρική αναπαράσταση μιας $f: U \to \mathbb{R}$ όπου $U \subset \mathbb{R}^2$:

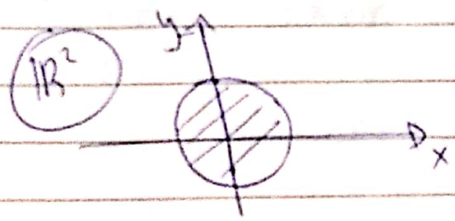



Συνοπτικά:




(καρτούν)
Cartan για το Μιτσομέλι

$f: U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}$,
$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

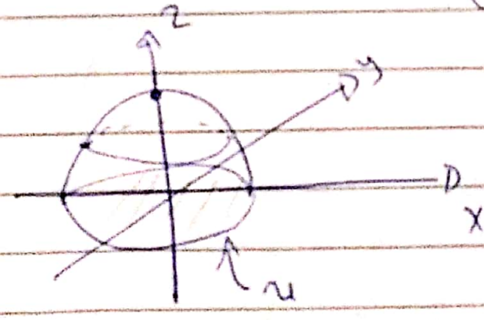



[Παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή (η $f$) για: $(x,y) = (0,0)$: $f(0,0) = 1$]

$U$: πεδίο ορισμού

$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

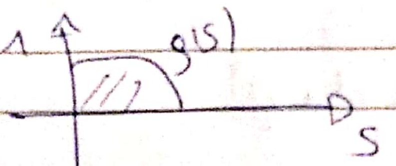
$(x^2+y^2) = \|(x,y)\|^2$: ευκλείδεια απόσταση του $(x,y)$ από το $(0,0)$



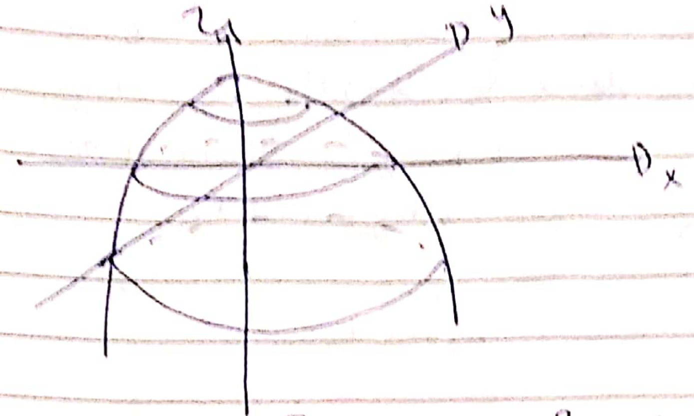

$=: g(\|(x,y)\|)$ [η $f$ είναι ακτινική]

$\Rightarrow g: [0,1] \to \mathbb{R}$
$g(s) = \sqrt{1-s^2}$

διότι εξαρτάται μόνο από την 'ακτίνα' δηλ. την απόσταση του $(x,y)$ από το $(0,0)$



Καμπύλες στάθμης: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=1-x^2-y^2$

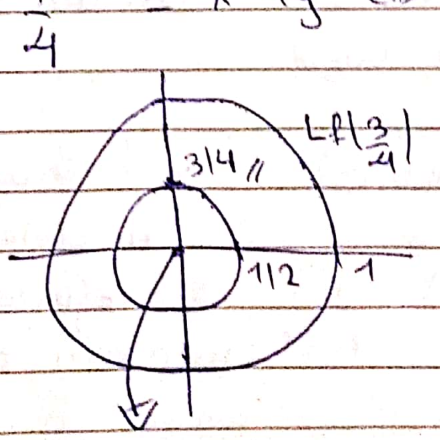



$Lf(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}$ όπου $c\in\mathbb{R}$, δηλ.

αν το $\mathbb{R}^2$ είναι ένας "χάρτης" με συντεταγμένες (GPS) $((x,y),z)$ για κάθε σημείο, τότε: π.χ. για $c=3/4$ το $Lf(3/4)$ μας δίνει όλα τα σημεία πάνω στο χάρτη για τα οποία η $f$ έχει: την τιμή $\frac{3}{4}$ [αν η $f(x,y)=1-(x^2+y^2)$ δίνει το ύψος της επιφάνειας ενός βουνού, τότε η $Lf\left(\frac{3}{4}\right)$ δίνει όλα τα σημεία πάνω στον χάρτη στα οποία έχουμε το ύψος $c=\frac{3}{4}$

Εδώ $Lf\left(\frac{3}{4}\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=\frac{3}{4}\right\} \iff$

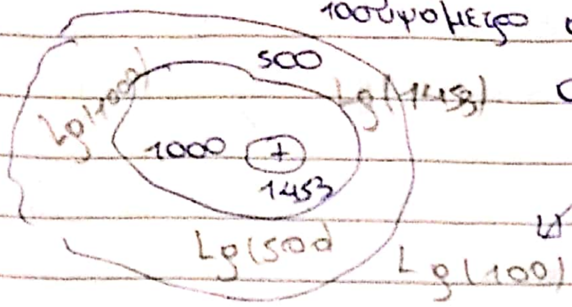
$\iff \frac{1}{4}=x^2+y^2 \iff \|(x,y)\|=\frac{1}{2}$




$Lf(1)=f(x,y)=1-(x^2+y^2)$

Θυμόμαστε χάρτες που έχουμε δει:

ισοϋψόμετρο αν αυτό το βουνό περιγράφεται από τη συνάρτηση $f$ τότε:




Για $c>1$: $L_f(c)=\emptyset$

Για $c=0$: $L_f(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

Ενδιαφέρουσα συνάρτηση ("σέλα")

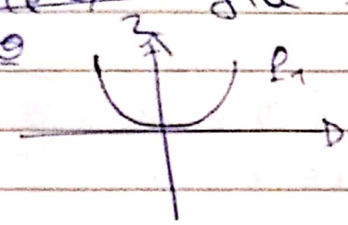
$f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Ειδικές περιπτώσεις: $f_1(x)=f(x,0)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

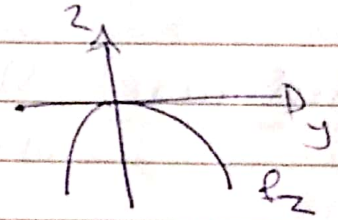
$f_2(y)=f(0,y)=-y^2$, $y\in\mathbb{R}$

$\boxed{x=0}$

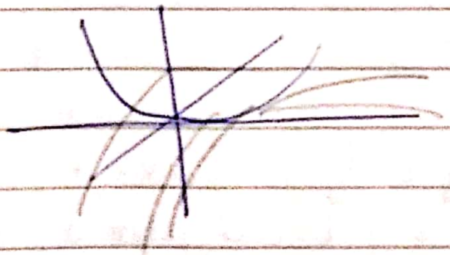
~~$L_f(e^{-1})$ για $f(x,y)=e^{xy}$~~




$\boxed{x=0}$



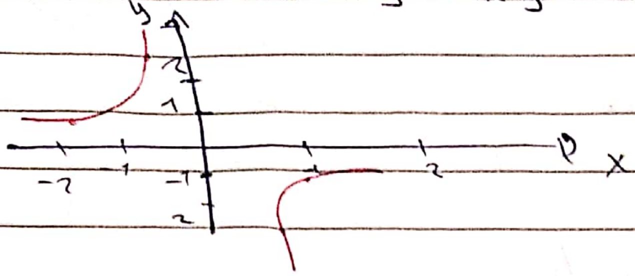

$f_3(y)=f(1,y)=1-y^2$



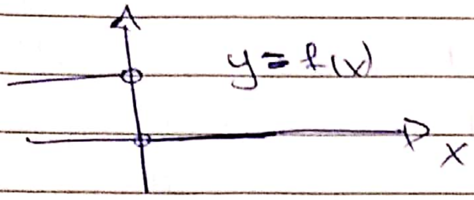
$Lf(e^{-2})$ για $f(x,y) = e^{xy}$

$\Downarrow$ $\quad e^{xy}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} = e^{-2}\} \Leftrightarrow xy = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x}$



Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$



Η $f$ έχει στο $x = 0$ σημείο ασυνέχειας υπό την έννοια ότι π.χ.

$f\left(-\frac{1}{\nu}\right) = 1 \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 1 \neq 0 = f(0)$

ακολουθία που πηγαίνει στο 0

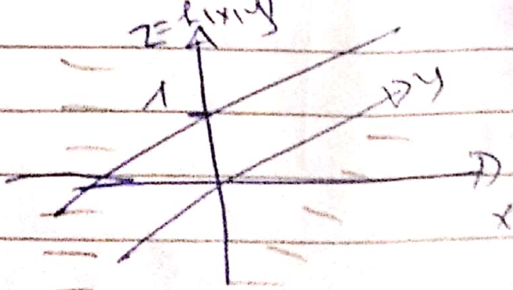
Υπενθύμιση! Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ αν-ν $\forall (x_\nu) \subset \mathbb{R}$ με $x_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 0$ :

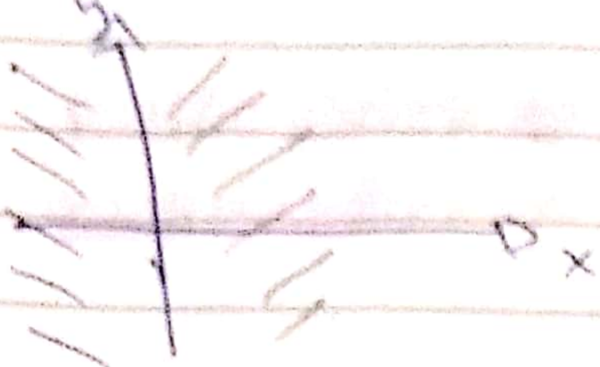
$: f(x_\nu) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} f(0)$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

Πεδίο ορισμού $= \mathbb{R}^2$

Εδώ έχουμε $f(x,y) = 0$





Εδώ έχουμε $f(x,y) = 1$

Η $f$ είναι ασυνεχής στα σημεία $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ ενώ σε όλα τα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού $\mathbb{R}^2$, δηλ. στα σημεία $\mathbb{R}^2 \setminus A$, η $f$ είναι συνεχής

Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0)$ αν $\forall\, (x_\nu, y_\nu) \subset \mathbb{R}^2$ με $(x_\nu, y_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} (x_0, y_0)$

ισχύει $f(x_\nu, y_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} f(x_0, y_0)$ $\quad : c = \|(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)\| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$

$$\underset{a_\nu \in \mathbb{R}}{\|} \qquad \qquad \underset{a_0}{\|}$$